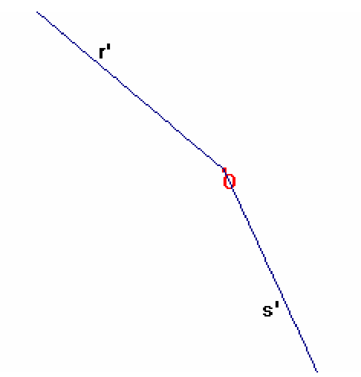
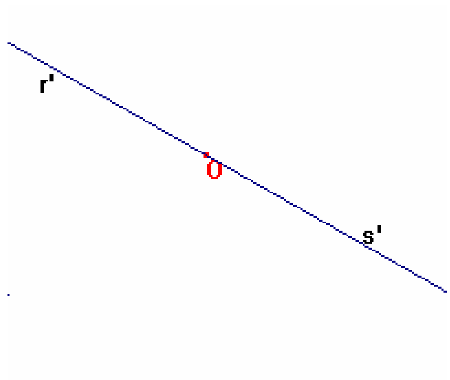
17. L'angolo, la congruenza.

17.0. **Nozioni elementari?**
Ci proponiamo di riflettere su due nozioni di base della geometria, sulle quali è probabile che, a prima vista, dei laureati in materie scientifiche ritengano che non vi siano dubbi o ambiguità. Tuttavia, secondo un testo autorevole[1]

> *"… non è ancora stato trovato – e forse non esiste affatto - un cammino semplice, pulito, lineare, "gerarchico" dai primi elementi ai risultati più avanzati della geometria. Diversamente da quello che accade in aritmetica ed algebra, perfino i concetti di base in geometria, come le nozioni di angolo e di distanza, debbono essere ripresi in considerazione a stadi differenti da differenti punti di vista."*

17.1. Che cosa è un angolo?
Una tra le risposte più frequenti è questa che riportiamo per prima.
Definizione 1. Date due semirette *r', s'* di origine *O,* si dice *angolo* di lati *r',s' e vertice O* la parte di piano compresa tra *r'* e *s'* (oppure, delimitata da *r'* e *s'*).
Figure come quelle qui sotto generano alcuni dubbi: quale parte di piano?





Per eliminare l'ambiguità della figura a sinistra, occorre distinguere l'angolo *convesso***.** Varie le definizioni reperibili sui testi scolastici[2]:

a) un angolo è convesso se non contiene i prolungamenti dei lati, concavo nel caso opposto
b) un angolo è convesso se contiene tutti i segmenti che hanno estremi sui suoi lati, concavo nel caso opposto
c) un angolo è convesso se è minore di un angolo piatto, concavo se maggiore
d) una figura è convessa se, comunque si prendano due punti appartenenti ad essa, il segmento che li ha come estremi è contenuto nella figura. Una figura non convessa si dice concava.

Ciascuna delle definizioni a), b), c) presenta degli inconvenienti; in particolare, se chiamiamo **piatto** un angolo i cui lati appartengono alla stessa retta, allora un angolo piatto è concavo se si prende la definizione a), non è né concavo né convesso per b), è convesso per c) e d).

Un'altra risposta probabile è la seguente.
Definizione 2. Date due rette *r* ed *s* che si tagliano in *O,* si chiama angolo ognuna delle intersezioni di un semipiano di origine *r* con un semipiano di origine *s.*
Anche in questo caso, sorgono delle perplessità: come distinguere tra le quattro coppie possibili di semipiani? Inoltre occorre una nuova definizione per gli angoli concavi.
Un modo per risolvere queste difficoltà è dato dalla variante seguente.
Definizione 2 bis. Un *angolo convesso* di vertice *O* è l'intersezione di due semipiani chiusi le cui rette frontiera sono distinte e si intersecano in *O;* un *angolo concavo* di vertice *O* è l'unione di due semipiani chiusi le cui rette frontiera sono distinte e si intersecano in *O.*

Nota. L'angolo **piatto** e l'angolo giro non sono contemplati in nessuna delle definizioni precedenti e devono essere introdotti a parte**.** Per esempio, se si adotta la definizione 2, bisogna poi aggiungere la definizione che segue.
Definizione 2P. Un *angolo piatto,* di vertice *O,* è l'intersezione di due semipiani chiusi coincidenti, sulla cui frontiera sono fissate due semirette opposte di origine *O*, che sono i lati dell'angolo piatto.

---

[1] I.C.M.I., *Perpectives on the teaching of geometry for the 21st century*, L'Enseignement Mathématique, **40,** 345-357, 1994
[2] Nicolina Malara, *L'insegnamento della geometria nella scuola media: questioni teoriche e didattico-metodologiche,* in "L'insegnamento della geometria", quaderno 19/1 del M.P.I., reperibile al sito http://www.liceo-vallisneri.lu.it/testi.htm.

Solitamente, la domanda iniziale non ottiene come risposta la definizione che si legge nei *Fondamenti della geometria,* di D. Hilbert, che però è diffusa nei corsi universitari.

Definizione 3. *Angolo ABC* è l’insieme costituito dal punto *B* (*vertice*) e dalle semirette *BA, BC* (*lati*).
Questa definizione non esclude che le due semirette siano coincidenti (angolo nullo) o che appartengano alla stessa retta (angolo piatto).
In conseguenza dell’assioma di Pasch e della definizione di semipiano, Hilbert definisce la “*regione angolare*” o “*parte interna*” dell’angolo *BAC* (con vertice *A),* come l’insieme dei punti *D* tali che *C* e *D* sono dalla stessa parte rispetto alla retta *AB*, e che *D* e *B* sono dalla stessa parte rispetto alla retta *AC* (se l’angolo è piatto, gli si associa come regione angolare uno dei semipiani determinati dalla retta su cui giacciono i lati dell’angolo).

In nessuna delle definizioni esaminate fin qui si distingue tra l’angolo di lati *a, b* e l'angolo di lati *b,a.* Se si vuole che il piano sia dotato di una orientazione (cioè se si sceglie un ordinamento nel fascio delle rette che passano per un punto fissato), allora conviene adottare un’altra definizione di angolo.
Definizione 4. Si dice *angolo* una coppia ordinata di semirette con la stessa origine.

Se l’obiettivo è preparare allo studio delle funzioni trigonometriche, forse la definizione migliore potrebbe essere ancora un’altra, che presuppone la conoscenza delle trasformazioni del piano (nei paesi anglosassoni, dove questa definizione è scelta nelle scuole primarie, si ritiene sufficiente una conoscenza di tipo pratico, intuitivo).
Definizione 5. Si chiama *angolo* di due semirette *r, s,* aventi la stessa origine *O,* la rotazione di centro *O* che porta *r* su *s.*

Ovviamente, per usare questa definizione di angolo occorre aver adottato una definizione di rotazione che non porti a circoli viziosi. Per esempio, se si suppone assegnata una funzione *distanza*, allora si definiscono le *isometrie* come le bijezioni che conservano la distanza; dopo aver classificato le isometrie del piano tramite i punti uniti, si chiama *rotazione* un'isometria che abbia un solo punto unito (il centro). Alternativamente, si può adottare un sistema di assiomi (come quelli di Peano, Bachmann, Choquet, Prodi) che affermi l'esistenza di una isometria che tiene fissi tutti i punti di una retta e scambia i due semipiani che hanno quella retta come origine (simmetria rispetto ad una retta); in questo caso, si definisce la rotazione come composizione di due simmetrie i cui assi sono incidenti.

Si può trovare in testi elementari una definizione, riportata da N. Malara (l. c. nella nota alla pagina precedente), che sembra, ma non è, una variante della definizione 5: *angolo* è una regione di piano descritta da una semiretta che ruota intorno alla sua origine. La definizione 5 associa ad una coppia di semirette non una parte di piano ma una trasformazione!

Nota. Secondo le definizioni 4, 5 l'angolo (*a,b*) è diverso dall'angolo (*b,a*).

Definiti gli angoli, si passa a confrontarli, dando la nozione di **congruenza o uguaglianza di angoli.**
Abbiamo visto che Hilbert include la relazione di congruenza tra angoli tra le nozioni primitive, regolate dagli assiomi del gruppo III. Facendo uso dell’assioma che premette di *trasportare* un angolo in modo che abbia un dato vertice ed un dato primo lato, si può definire la somma di due angoli (*a, b*), (*b, c*) come l’angolo (*a, c*), ma il risultato ottenuto rispetta l’intuizione soltanto se le regioni angolari relative agli addendi sono “abbastanza piccole”.
Se si adottano le definizioni più “elementari” 1, 2, si nota subito che la somma è ben definita per due angoli *abbastanza piccoli,* ma che non è chiaro come operare nel caso di due angoli concavi. Altre difficoltà nascono se si vogliono determinare i multipli di un angolo; ad esempio, fissato un angolo ottuso[3], quale angolo è il suo quadruplo?
Con la definizione 5 si evitano le ambiguità riscontrate nei casi precedenti; infatti, due angoli sono uguali se coincidono come rotazioni; si definisce la somma di angoli come composizione di rotazioni.

Sia che si adotti una delle definizioni "statiche" 1, 2, 3, 4, sia che si scelga la definizione "dinamica" 5, si deve affrontare il problema della ***misura*** degli angoli. Secondo Malara (l.c., pag. 46) "oggi si concepisce l'ampiezza di un angolo come classe di equivalenza di angoli congruenti, assumendo come primitivo il concetto di congruenza (che viene caratterizzato assiomaticamente) e si definisce una misura sulle ampiezze che risulta essere additiva, ordinata ma il cui ordinamento non conserva l'additività per effetto dell'azzeramento dell'angolo giro. Secondo questa impostazione, si comprende come contrariamente a quanto sostenuto una volta, gli angoli non costituiscano una classe di grandezze (ricordiamo che in una classe di grandezze, date tre grandezze omogenee a,b,c, se mis a < mis b allora mis a + mis c < mis b + mis c)."
Questa problematica è superata dall'ultima definizione di questa rassegna e in alcune assiomatiche (Birkhoff, Prodi).

[3] sorvoliamo sulla definizione di angolo retto, acuto, ottuso

Definizione 6. *L'angolo (trigonometrico*, secondo Porcaro[4]*)* è una funzione dall'insieme delle coppie ordinate di semirette con una data origine ai numeri reali modulo 2π tale che, indicato con $\angle ab$ il valore di tale funzione sulla coppia (a,b), valgano le proprietà

$$\angle aa = 0, \quad \angle ab = -\angle ba, \quad \angle ab + \angle bc = \angle ac.$$

Malara (l.c.) riporta alcune pseudo-definizioni reperibili in testi elementari: *angolo* come *pendenza* di una retta rispetto ad una retta fissata, *angolo* come *mutamento* di direzione in un percorso. Queste sono da ritenersi preparatorie per definizioni del tipo 4 , 5, 6, riservate alle scuole superiori.
Nello stesso articolo, Malara elenca anche alcuni degli **errori** frequentemente compiuti dagli studenti:

- identificazione dell'angolo con il suo vertice (origine dell'errore: l'uso del termine nel linguaggio comune?)
- angolo come parte limitata di piano (indotto dall’identificazione dell’angolo con la sua raffigurazione?)
- conseguentemente all'errore precedente, errori nel confronto di angoli (maggiore quello i cui lati sono rappresentati nel disegno con segmenti più lunghi)
- mancato riconoscimento di un angolo retto se i lati non sono paralleli ai lati del foglio su cui è disegnato
- incapacità di confrontare due angoli se non hanno un lato in comune o se un lato di uno non sta su una retta parallela a un lato dell'altro.

Porcaro conclude (pag. 696) che quello di angolo non è un singolo concetto ma un "**campo concettuale**". Secondo Vergnaud, *"un campo concettuale è un insieme di problemi e di situazioni per trattare i quali sono necessari concetti, procedure, e rappresentazioni, differenti ma strettamente connessi."* Porcaro osserva che a partire dalla geometria elementare fino all'introduzione della trigonometria e delle funzioni trascendenti ci si imbatte in definizioni di angolo che mutano e si ampliano. "Generalmente si tende a procedere per ampliamenti, in modo da recuperare le vecchie nozioni relative all'angolo come casi particolari delle nuove definizioni. Non sempre ciò è possibile, ed allora ci si trova di fronte a vere e proprie fratture con quanto affermato in precedenza."

17.2. Quando un segmento è uguale (o congruente) a un altro?

Il primo impaccio, nel rispondere a questa domanda, viene dalla presenza dei due aggettivi: sono davvero interscambiabili? Il secondo è il sostituto “moderno” del primo? Quali sono le ragioni di questo cambiamento di vocabolario: la moda o la ricerca di maggior precisione e chiarezza?
Nelle traduzioni di Euclide si trova soltanto il termine “uguale”, ma, dice Hartshorne[5], *“la nozione di uguaglianza di Euclide richiede una speciale attenzione. Egli non definisce mai l’eguaglianza, ma dobbiamo leggere fra le righe per vedere che cosa intende.”*
Evidentemente diversi sono i significati dello stesso aggettivo nelle proposizioni 34 e 35 del primo libro degli Elementi:

34. I lati e gli angoli opposti di un parallelogrammo sono uguali.
35. Parallelogrammi con la stessa base che stanno tra due stesse parallele sono uguali.

Oggi si preferisce usare l’aggettivo “uguale” quando i due oggetti esaminati sono due diverse presentazioni di uno stesso elemento, denominato e individuato in due diversi modi: per esempio, se i punti A,B,C,D si trovano su una stessa retta, allora *la retta AC è uguale alla (coincide con la) retta BD.* Un altro esempio: il polinomio, nella variabile x,

$$x^2 + 3x + 2$$

è uguale al polinomio monico (cioè con coefficiente del termine di grado massimo uguale ad 1) di secondo grado nella variabile x che ha come radici -2 e -1.
Nei casi, invece, in cui si tratti di oggetti, distinti tra loro, tra i quali sussiste una relazione di equivalenza, si preferisce usare un termine che richiami la relazione considerata. Ad esempio, dato un parallelogramma $ABCD$, fissata una diagonale AC, si preferisce dire che i due triangoli ABC, ADC sono tra loro congruenti, e per due parallelogrammi con la stessa base che stanno tra due stesse parallele si usano termini come “equiestesi” o “equivalenti in area”.

A. Morelli, in un suo articolo dal titolo *Che vuol dire che il segmento AB è congruente al segmento A'B'?*[6] asseriva che le più frequenti tra le risposte sono:

a) *vuol dire che esiste un movimento che fa sovrapporre il segmento AB al segmento A’B’*
b) *vuol dire che i segmenti AB, A’B’ hanno la stessa lunghezza.*

---

[4] Roberto Porcaro, *Angolo: un problema didattico aperto,* L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 16, n. 8, 1993, pag. 689-712
[5] Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond,* Springer,2000, chap 1, n. 3, traduzione propria
[6] Aldo Morelli, *Che vuol dire che il segmento AB è congruente al segmento A'B'?,* Convegno per i sessantacinque anni di Francesco Speranza - Pitagora ed., Bologna, 1997, pag. 104-105

Nel primo caso, la questione si sposta su "che cosa è un movimento?"; nel secondo, "che cosa è la misura di un segmento?". Frequentemente, questa catena di domande genera **circoli viziosi**: può accadere alla risposta a) segua

a') *un movimento è una corrispondenza tra segmenti tale che segmenti corrispondenti siano congruenti*

o che dopo aver risposto b) si enunci la *definizione:*

si dice che due segmenti hanno la stessa lunghezza se sono congruenti. La lunghezza è un numero associato ad una classe di segmenti tutti congruenti tra loro.

Per non cadere in circoli viziosi occorre aver chiaro quali siano i punti di partenza, vale a dire: **i termini primitivi** (non esplicitamente definiti), le proprietà di quegli oggetti primitivi che sono state prese come "regole del gioco" (**assiomi**), quelle che sono state dimostrate (**teoremi**) e le nozioni che si sono costruite a partire da termini primitivi, assiomi e teoremi (**definizioni**).

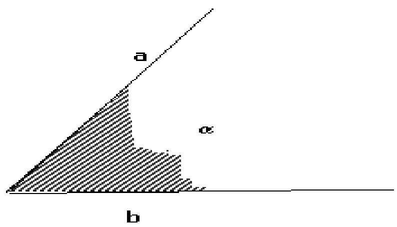
Nella scia di Euclide, i testi scolastici classici non elencano tra i termini primitivi quello di "uguaglianza" o "congruenza" tra figure, però usano il termine, anzi il famoso Enriques-Amaldi, *Elementi di Geometria*, almeno nella seconda edizione ristampata nel 1993 (ed. Zanichelli, Bologna), definisce uguali due figure se sono sovrapponibili; dunque, tacitamente Enriques e Amaldi ammettono come primitiva la nozione di *sovrapponibilità*.
Altri autori rendono esplicita in forma moderna la nozione primitiva (non esplicitata da Euclide) di sovrapponibilità dando come nozione primitiva quella di *movimento rigido***:** due figure sono congruenti se esiste un movimento rigido che trasforma l'una nell'altra. Perciò, tra gli assiomi posti a fondamento della teoria includono l'esistenza di un gruppo[7] di trasformazioni (cioè bijezioni del piano, o dello spazio, su se stesso) e le proprietà che caratterizzano queste trasformazioni: che mandano rette in rette, semipiani in semipiani e altro ancora.

Altri, come G. Prodi,[8] seguendo illustri autori come Birkhoff[9] e Choquet[10], preferiscono includere tra gli assiomi quello che afferma l'esistenza della funzione *distanza* (cioè lo spazio della geometria è uno spazio metrico) e definire le isometrie (o congruenze) come le corrispondenze che conservano le distanze. Una volta dimostrato che le isometrie formano un gruppo di trasformazioni, si può dare la definizione: due figure sono congruenti se esiste una isometria che trasforma l'una nell'altra.

17.3. Esercizi.

1. Da Vinicio Villani, *Errori nei testi scolastici: geometria,* Archimede, anno XLV, 1993, n. 3, pag. 134-144.
"*Citazione* da un testo di matematica per il triennio della scuola secondaria superiore.

I. *Un angolo α è una porzione di piano delimitata da due semirette a e b uscenti da uno stesso punto O, che prende il nome di vertice dell'angolo, mentre le due semirette sono dette lati. Due angoli α e β sono* ***uguali*** *se esiste una rototraslazione che sovrapponga i vertici e i lati.*



II. *Due angoli si dicono* ***contigui*** *se hanno il vertice e un lato in comune: la regione di piano da essi coperta si dice* ***somma*** *dei due angoli. E' evidente che la somma di due angoli può esaurire tutto il piano.*

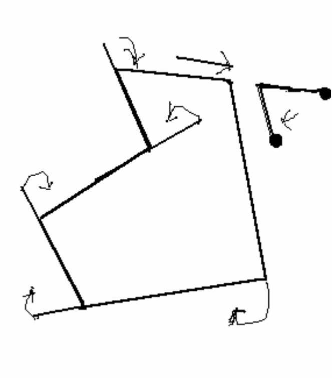
III. *Definita la somma si possono considerare i multipli di un angolo […] Si accetta, come postulato, che per ogni angolo α e ogni intero n esista un angolo β tale che $n\beta = \alpha$.*

IV. *Infine, l'angolo α si dice* ***maggiore*** *o* ***uguale dell'angolo*** *β se α è uguale a un angolo α* contiguo a β tale che la regione di piano determinata da α* contenga quella determinata da β."*

Sapete trovare un esempio di angoli contigui secondo la definizione II per i quali la somma sia diversa dalla "regione di piano da essi coperta"? Quale significato bisogna dare al termine "contiguo" (definito in II) perché la definizione IV sia ragionevole?

[7] Il fatto che le trasformazioni considerate costituiscano un gruppo è essenziale perché la relazione tra figure "essere trasformata, la prima nella seconda da una trasformazione del gruppo" sia una relazione di equivalenza.
[8] *Matematica come scoperta,* D'Anna, Firenze, 1977, con altri autori, *Scoprire la matematica, Geometria del piano,* Ghisetti e Corvi, Milano, 2003
[9] George Birkhoff, *A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor,* Annals of Math, vol 33, pag 329-345 (1932), riportati in appendice a: Judith Cederberg, *A Course in modern Geometries,* sec. ed. 2001, Springer, Berlin - New York
[10] Gustave Choquet, *L'insegnamento della geometria,* Feltrinelli, Milano, sec. ed. 1969

2. Un esempio di uso delle definizioni dinamiche di angolo è questa *dimostrazione senza parole,* tratta da Claudio Bernardi, *Come e che cosa dimostrare nell'insegnamento della matematica,* L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 20A, n. 5, 1997, pag. 508-522.
"La somma degli angoli esterni di un poligono P è uguale a quattro angoli retti (e quindi non dipende dal numero dei lati di P). Questo enunciato di geometria elementare si può "dimostrare" seguendo il contorno di P con un fiammifero, come suggerito in figura: in corrispondenza ad ogni vertice di P, il fiammifero ruota di un angolo



(orientato) uguale all'angolo esterno in quel vertice; alla fine, il fiammifero ha fatto un giro completo, cioè quattro angoli retti."
Se conoscete altre dimostrazioni della stessa proprietà, confrontatela con questa.

3. Da Roberto Porcaro, *Angolo: un problema didattico aperto,* L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol.16, n.8, 1993, pag. 689-712.

a) E' possibile disegnare un angolo di 765°? Giustifica la risposta.
b) E' data la seguente funzione $f: R \to R$, dove $x \to \sin(x) + \cos(x)$. Calcolane la derivata. Per $x = 3/2$ detta derivata assume un valore positivo, negativo o nullo? Giustifica la risposta.

4. “Sovrapponibilità” ed “equivalenza rispetto a movimenti rigidi” sono esattamente lo stesso concetto?
Due triangoli simmetrici rispetto ad una retta sono sovrapponibili?
Nello spazio: una terna destrorsa di versori unitari e una sinistrorsa sono sovrapponibili? una vite destra e una sinistra?